Definice: Matice A typu r/s nad P

je lib. zobr.

$$A : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \to P.$$

Hodnota zobr. A na dvojici $(i,j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$ se značí A_{ij}. Zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix}.$$

Příklad:

$$B : \underbrace{\{1,2,3,4\}}^{\text{řádky}} \times \overbrace{\{1,2,3\}}^{\text{sloupce}} \to \mathbb{R}$$

$(1,1) \mapsto 3$ $(2,1) \mapsto 0$

$(1,2) \mapsto \ln 2$ $(2,2) \mapsto -1$

$(1,3) \mapsto 1/2$ $(2,3) \mapsto 0$

$(3,1) \mapsto 1,$ $(4,1) \mapsto -1$

$(3,2) \mapsto 2$ $(4,2) \mapsto 0$

$(3,3) \mapsto 3$ $(4,3) \mapsto +1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \ln 2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Elementární řádkové úpravy:

1. prohození dvou řádků
2. vynásobení řádku $c \in P \setminus \{0\}$
3. Přičtení c-násobku i-tého řádku k j-tému řádku

Pozn.: $M_{r,s}(P)$ .... mn. všech matic typu r,s nad polem P.

$\sim = \{(A,B) \in M_{r,s}(P) \times M_{r,s}(P) \mid$ A a B se liší o kon. počet elem. řádk. úprav$\}$

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Je A v relaci s B?

$$\begin{matrix} (-3) \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{= A} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{= B}$$

Tvrzení: Buďte A, B, C matice.

Pak platí

$$A \sim A$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

Důkaz: Vezmu 1. řádek matice A a vynásobím jej $c=1$.

....

$\square$

Soustavy lin. rovnic

Příklady:

1. $2x + y = 2$
   $x - y = 3$

2. $x^2 + y = 0$
   $x - y = 2$

3. $x = 0$

4. $\sin x = 0$

5. $y = k \cdot x + q$
   $k \cdot x - y = -q$

   $\vdots$ 〃1 〃2 〃3 〃6

6. $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

$$\underbrace{a}_{a_1}\cdot\underbrace{x}_{x_1}+\underbrace{b}_{a_2}\cdot\underbrace{y}_{x_2}+\underbrace{c}_{a_3}\cdot\underbrace{z}_{x_3}+\ldots\underbrace{}_{a_n}\underbrace{}_{x_n}=\underbrace{d}_{b}$$

$$a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1s}x_s=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2s}x_s=b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{r1}x_1+a_{r2}\cdot x_2+\ldots+a_{rs}x_s=b_r$$

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & b_2\\ \vdots & & & \vdots & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rs} & b_r \end{array}\right)$$

Příklady:

Schodovitý tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanův tvar

Příklad:

$A: \; 2x + 3y = 1 \qquad 2x + 3y + 0 \cdot z = 1$

$\quad\;\; y + z = 2 \qquad 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 2$

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x - \frac{3}{2} z = -\frac{5}{2} \\ y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} z \qquad x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} t$

$y = 2 - z \qquad y = 2 - t$

$z = t$

$$X_A = \left\{ \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2} t, 2 - t, t \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$