Definice: Buď V v. pr. nad P. Podmn. $\mathcal{U} \subseteq V$ se nazývá podprostor, jestliže platí

- (i) $0 \in \mathcal{U}$,
- (ii) $a + b \in \mathcal{U} \ \forall a, b \in \mathcal{U}$,
- (iii) $r \cdot a \in \mathcal{U} \ \forall a \in \mathcal{U}, \forall r \in P$.

Příklady:

1. $\mathcal{U} = V$
2. $\mathcal{U} = \{0\}$
3. $V = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}$

   ✓ $\mathcal{U} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   ✗ $\mathcal{U}_1 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $V = \mathbb{R}^3$, $P = \mathbb{R}$

   ✗ $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$,

   nula v $\mathbb{R}^3$: $(0, 0, 0)$

   $(0, 0, 0) \notin \mathbb{R}^2$
5. $V = \mathbb{R}^3$, $P = \mathbb{R}$

   ✓ $\mathcal{U} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Definice: Buďte $u_1, \dots, u_n$ lib. vektory z v.p. V nad P. Ozn. $[u_1, \dots, u_n]$ množinu všech P-lin. komb. vektorů $u_1, \dots, u_n$:

$$[u_1, \dots, u_n] = \{x_1 . u_1 + \dots + x_n u_n \mid x_1, \dots, x_n \in P\}.$$

Tuto mn. nazýváme lin. obalem vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Příklad: $V = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}$

$u_1 = (0,1)$

$[u_1] = \{(0, x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\}$

$x_1 . u_1 = x_1 . (0,1) = (0, x_1)$

$u_2 = (1,0)$

$[u_1, u_2] = \mathbb{R}^2$

$x_1 . u_1 + x_2 . u_2 = x_1 . (0,1) + x_2 . (1,0) =$

$= (x_2, x_1)$

Tvrzení: Buďte $u_1, \dots, u_n \in V$ lib. vektory z v.pr. V. Pak platí:

(1) Lin obal $[\![u_1, \dots, u_n]\!]$ je podpr. ve V.

(2) Je-li $U \subseteq V$ podprostor obsahující vektory $u_1, \dots, u_n$, pak $[\![u_1, \dots, u_n]\!] \subseteq U$.

Důkaz: ad 1) $u_1, \dots, u_n \in V$ dle předp.

$\forall x_1, \dots, x_n \in P$ je $\underbrace{\underbrace{x_1 . \underbrace{u_1}_{\in V}}_{\in V} + \dots + \underbrace{x_n . \underbrace{u_n}_{\in V}}_{\in V}}_{\in V} \in V$?

$\Rightarrow [\![u_1, \dots, u_n]\!] \subseteq V$

(i) $0 . u_1 + \dots + 0 . u_n = 0 \in V$
$\in [\![u_1, \dots, u_n]\!]$

(ii) $\forall v_1, v_2 \in [\![u_1, \dots, u_n]\!] \Rightarrow$

$v_1 + v_2 = \underbrace{x_1 . u_1 + \dots + x_n . u_n}_{= v_1} + \underbrace{y_1 . u_1 + \dots + y_n . u_n}_{= v_2}$

$= (x_1 + y_1) . u_1 + \dots + (x_n + y_n) . u_n$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in [\![u_1, \dots, u_n]\!]$

(iii) $\forall r \in P, \forall v_1 \in [\![u_1, \dots, u_n]\!]$

$r . v_1 = r . (x_1 . u_1 + \dots + x_n . u_n)$

$= (r . x_1) . u_1 + \dots + (r . x_n) . u_n$

$\Rightarrow r . v_1 \in [\![u_1, \dots, u_n]\!]$

$\Rightarrow [\![u_1, \dots, u_n]\!]$ je vekt. podpr. ve V.

ad 2) viz cvičení $\square$

Tvrzení: Lib. podprostor konečněrozměrného prostoru je konečněrozměrný.

Důsledek: Vekt. pr., který obsahuje alespoň jeden nekonečněrozměrný podprostor, je sám nekonečněrozměrný.

Tvrzení: Buď V kon. rozm. v. pr., buď $U \subseteq V$ jeho podprostor. Nechť $\dim U = \dim V$. Pak $U = V$.

$\Rightarrow$

Tvrzení: Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory v. p. V. Pak je průnik $U' \cap U''$ též podprostor.

Důkaz: $U', U'' \subseteq V \Rightarrow U' \cap U'' \subseteq V$

a) $0 \overset{?}{\in} U' \cap U''$

$0 \in U'$, $0 \in U'' \Rightarrow 0 \in U' \cap U''$

b) $\forall a, b \in U' \cap U''$

$\Rightarrow a \in U' \wedge a \in U''$

$\underbrace{b \in U'} \wedge \underbrace{b \in U''}$

$\Rightarrow a+b \in U' \wedge a+b \in U''$

$\Rightarrow a+b \in U' \cap U''$

c) $\forall r \in P, \forall a \in U' \cap U''$

$\Rightarrow \underbrace{a \in U'} \wedge \underbrace{a \in U''}$

$\Rightarrow r \cdot a \in U' \wedge r \cdot a \in U''$

$\Rightarrow r \cdot a \in U' \cap U''$

$\Rightarrow U' \cap U''$ je v. podpr. ve V. $\square$

Definice: Buďte U', U'' dva podpr. v pr. V.

Ozn.:

$$\underline{U' + U''} = \{ u' + u'' \mid u' \in U', u'' \in U'' \}.$$

Mn. $U' + U''$ se nazývá <u>součet</u> podprostorů U' a U''.

Příklad: $V = \mathbb{R}^3$, $P = \mathbb{R}$

$$U' = \{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \},$$

$$U'' = \{ (0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$U' + U'' = \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$(x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0)$$

Tvrzení: Buďte $U', U'' \subseteq V$ podpr. Pak $U' + U''$ je v. podpr. ve V.

Důkaz: 1. $U' + U'' = \{u' + u'' \,/\, u' \in U', u'' \in U''\}$

$\Rightarrow \underset{\forall u', u'' \in V}{u' \in V \wedge u'' \in V} \Rightarrow u' + u'' \in V.$

$\Rightarrow U' + U'' \subseteq V$

2. $0 = \underbrace{0}_{\in U'} + \underbrace{0}_{\in U''}$

3. $\forall\, a, b \in U' + U''$

$a \in U' + U'' \Rightarrow a = \underbrace{a'}_{\in U'} + \underbrace{a''}_{\in U''}$

$b \in U' + U'' \Rightarrow b = \underbrace{b'}_{\in U'} + \underbrace{b''}_{\in U''}$

$a + b = a' + a'' + b' + b''$
$= \underbrace{(a' + b')}_{\in U'} + \underbrace{(a'' + b'')}_{\in U''}$

$\Rightarrow a + b \in U' + U''$

4. $\forall r \in P, \forall a \in U' + U''$

$a \in U' + U'' \Rightarrow a = \underbrace{a'}_{\in U'} + \underbrace{a''}_{\in U''}$

$r \cdot a = r \cdot (a' + a'') = \underbrace{r \cdot a'}_{\in U'} + \underbrace{r \cdot a''}_{\in U''}$

$\Rightarrow r \cdot a \in U' + U''$

$\Rightarrow U' + U''$ je vekt. podpr. ve V. $\square$

Tvrzení: Buďte U', U'' podpr. ve V. Pak

$$\dim U' + \dim U'' = \dim(U' + U'') + \dim(U' \cap U'').$$