Tvrzení: Zvolme bázi $u_1, \dots, u_n$ v konroz. v. pr. $\mathcal{U}$. Pak ke každé n-tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$ ex. právě jedno lin. zobr. $f: \mathcal{U} \to V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.

Důkaz (idea):

Zvolme n-tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$.

V $\mathcal{U}$ máme bázi: $u_1, \dots, u_n$

$\forall u \in \mathcal{U} \ \exists \ x_1, \dots, x_n \in P$:

$$u = \underline{x_1} . u_1 + \dots + \underline{x_n} . u_n$$

Položíme: $f(u) = \underline{x_1} . v_1 + \dots + \underline{x_n} . v_n$

$$u = \underset{x_1}{1} . u_1 + \underset{x_2}{0} . u_2 + \dots + \underset{x_n}{0} . u_n$$

$$\underline{f(u_1)} = 1 . v_1 + 0 . v_2 + \dots 0 . v_n = \underline{v_1}$$

$$\bar{u} = \underset{x_1}{0} . u_1 + \underset{x_2}{1} . u_2 + \dots + \underset{x_n}{0} . u_n$$

$$\underline{f(\bar{u})} = 0 . v_1 + 1 . v_2 + \dots + 0 . v_n = \underline{v_2}$$

$$\vdots$$

$$f(\underset{u_n}{\overset{\|}{\bar{\bar{u}}}}) = v_n$$

$$\Rightarrow f(u_i) = v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- Linearita zobr.
- jednoznačnost

$\forall a, b \in \mathcal{U}$:

$$\underline{f(a+b)} = f(a_1 . u_1 + \dots + a_n . u_n + b_1 . u_1 + \dots + b_n . u_n)$$
$$= f((a_1 + b_1) . u_1 + \dots + (a_n + b_n) . u_n)$$
$$= (a_1 + b_1) . v_1 + \dots + (a_n + b_n) . v_n$$
$$= \underline{a_1 . v_1 + \dots + a_n . v_n} + \underline{b_1 . v_1 + \dots + b_n . v_n}$$
$$= \underline{f(a) + f(b)}$$

homogenita ...

$\vdots$

$\square$

Tvrzení: Buď $f: U \to V$ zobr. z před.

Tvrzení.

(1) f je injektivní $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou LN

(2) f je surjektivní $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n \in V$ gen. V.

Důkaz:

(1) "$\Leftarrow$" předp. $v_1, \dots, v_n$ jsou LN

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = 0 \qquad x_1, \dots, x_n \in P$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \dots, x_n = 0$$

$$\forall a, b \in U : f(a) = f(b) \Rightarrow$$

$$f(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = f(b_1 u_1 + \dots + b_n u_n)$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n = b_1 \cdot v_1 + \dots + b_n \cdot v_n$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n = 0 \quad + LN$$

$$\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow \text{zobr. } f \text{ je injektivní}$$

"$\Rightarrow$" předp. f je inj.

$$\forall a, b \in U : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot v_1 + \dots a_n \cdot v_n = b_1 \cdot v_1 + \dots + b_n \cdot v_n$$

$$(a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, \dots a_n - b_n = 0$$

$$\Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ jsou LN}$$

⋮

$\square$

Title: 3. 22-10:19 dop. (2 of 6)

Frobeniova věta a hodnost matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

A (nerozšířená) matice soustavy

$\bar{A}$ ... rozšířená matice soustavy

Definice: Buď A matice typ. m/n nad P.
Ozn. $A_1 = (A_{11}, \dots, A_{1n}) \in P^n$, $\dots$, $A_m = (A_{m1}, \dots, A_{mn}) \in P^n$ její řádky. Uvažujme podpr. $[\![A_1, \dots, A_m]\!] \leq P^n$ gen. řádky matice A. Ozn. $rk A = \dim [\![A_1, \dots, A_m]\!]$ jeho dimenzi.
Číslo $rk A$ se nazývá <u>řádková hodnost</u> matice A.

Příklad:
$$A = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}$$
$A_1 = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$

$$\dim [\![(1,2,3), (0,0,1), (1,0,1)]\!] = 3$$

Tvrzení: Elem. řádkové úpravy nemění řádkovou hodnost matice.

Důkaz: $[\![A_1, \dots, A_m]\!]$ elem. řádkové úpravy nahrazují vekt. jejich lin. komb.
$\Rightarrow$ Nemění mn. $[\![A_1, \dots, A_m]\!]$
$\Rightarrow$ nemění dim ... $\Rightarrow$ nemění řádkovou hodnost matice.

Příklad:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim [\![(1,2,3), (0,0,1), (1,0,1)]\!] = 3$$

Důsledek: Řádkově ekviv. matice mají stejnou řádkovou hodnost.

Tvrzení: Buď A matice typu m/n nad P. S řádky $A_1, \dots, A_m$, buď A' řádkově ekviv. matice ve schod. tvaru. Nechť má A' právě h nenulových řádků $A'_1, \dots, A'_h$. Pak platí $\operatorname{rk} A = h$ a řádky $A'_1, \dots, A'_h$ tvoří bázi prostoru $[A_1, \dots, A_m]$.

$$
\begin{array}{c}
A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m
\end{array}
\quad
A = \begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\
\vdots & & & \\
A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$A \sim A'$ ... schod. tvar

Homogenní soustavy lin. rovnic

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 & + \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
\vdots & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

$$
\left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{b} \right) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
$$

$$A \cdot x = b$$

Pro $b = 0$ nazýváme soustavu homogenní soustavou lin. rovnic