Tvrzení: Vekt. pr. $\bar{U}$ všech řešení hom. soustavy $Ax = 0$ má dimenzi $n - \mathrm{rk}\,A$, kde n je počet neznámých.

Tvrzení: Buď ξ_* lib. pevně zvolené řešení neh. soustavy $Ax=b$. Pak je mn. všech řešení neh. soust. $Ax=b$ rovna mn.

$$\{\xi+\xi_* \mid \xi \text{ je řeš. } Ax=0\}.$$

Důkaz: Je-li $x=\xi$ lib. řešení soust. $Ax=0$, pak je $\xi+\xi_*$ řešení neh. soust. $Ax=b$

$$Ax = \underline{A(\xi+\xi_*)} = \underbrace{A\xi}_{0} + A\xi_* =$$

$$A\xi_* = \underline{b}$$

A naopak, každé řešení $x=\eta$ neh. soustavy $Ax=b$ je ve tvaru $\eta=\xi+\xi_*$ pro vhodné ξ.

$$\Rightarrow \xi = \eta - \xi_*$$

$$\underline{A.\xi} = A(\eta-\xi_*) = \underbrace{A\eta}_{b} - \underbrace{A\xi_*}_{b}$$

$$= b - b = \underline{0}$$

$\Rightarrow \xi$ je řešení hom. syst. $Ax=0$.

Důsledek: Buď ξ_* lib. partik. řešení neh. soust. $Ax=b$. Buď $\eta_1, \dots, \eta_r$ fundamentální řešení hom. soust. $Ax=0$. Pak mn. všech řešení neh. soust. $Ax=b$ je rovna mn.

ξ

$$\left\{ \xi_* + \underbrace{p_1\eta_1 + \dots + p_r\eta_r}, \; p_1, \dots, p_r \in P \right\}$$

Př.:

$$x_1 + 2x_3 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ .... roz. mat. soust.}$$

$$\begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ .... mat. soustavy}$$

$$x_1 = -2x_3 \qquad x_1 = -2r$$
$$x_2 = -x_3 - x_4 \qquad x_2 = -r - s$$
$$x_3 = r$$
$$x_4 = s \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$$

$$\xi = \{(-2r, -r-s, r, s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\xi^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Zkouška:

$$L_1 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 = P_1$$

$$L_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 = P_2$$

Ob. řešení neh. soustavy:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (-2r, -r-s, r, s)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + r \cdot (-2, -1, 1, 0) \quad p_1 \cdot u_1 + p_2 \cdot u_2$$
$$+ s \cdot (0, -1, 0, 1)$$

Def.: Sloupcová hodnost matice A je dimenze podpr. gen. sloupci matice A.

Tvrzení: Sloupcová i řádková hodnost matice jsou si rovny:

$$\mathrm{rk}^T A = \mathrm{rk}\, A$$

Důsledek: $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^T$

Tvrzení (Frobeniova věta):

Soustava lin. rovnic má alespoň jedno řešení právě tehdy, když platí

$$\mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}\,\bar{A}.$$

Důkaz: Nějaká n-tice (skalárů) je řešením neh. soust. lin. rovnic právě tehdy když

$$A_1\xi_1 + \dots + A_n\xi_n = b.$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix}\xi_1 + \begin{pmatrix} A_2 \end{pmatrix}\xi_2 \dots + \begin{pmatrix} A_n \end{pmatrix}\xi_n = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

A_i je itý sloupec matice A.

Taková n-tice $\exists$ právě tehdy, když b je lin. komb. $A_1, \dots, A_n$.

$$\Rightarrow [\![A_1, \dots, A_n]\!] = [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$$

$$\Rightarrow \mathrm{rk}^T A = \mathrm{rk}^T \bar{A}$$

$$\mathrm{rk}^T A = \mathrm{rk}\,A, \quad \mathrm{rk}^T \bar{A} = \mathrm{rk}\,\bar{A}, \quad \underline{\mathrm{rk}\,A} = \underline{\mathrm{rk}\,\bar{A}}$$

Naopak. Nechť jsou si rovny sloupcové hodnosti A a $\bar{A}$.

$$\Rightarrow \mathrm{rk}^T A = \mathrm{rk}^T \bar{A}$$

$$\Rightarrow \dim [\![A_1, \dots, A_n, b]\!] = \dim [\![A_1, \dots, A_n]\!]$$

Protože $[\![A_1, \dots, A_n]\!] \subseteq [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$

$$\Rightarrow [\![A_1, \dots, A_n]\!] = [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$$

$\square$

Tvrzení: Neh. soustava $Ax=b$ s invertibilní čtvercovou maticí A má pro každou pravou stranu b jediné řešení:

$$x = A^{-1}b.$$

Pozn.:

$$A^{-1} / \; Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

Tvrzení (Cramerovo pravidlo):

Buď $Ax=b$ neh. soust. s invertib. čtvercovou maticí A a řešením $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Pak

$$\xi_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

kde A_i je matice vzniklá z A náhradou i-tého sloupce sloupcem pravé strany.

Příklad:

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 - [+1+1] = -1$$

$$\det A_1 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1+2-[1+1+0] = 1$$

$$\det A_2 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2+1-[2+1] = 0$$

$$\det A_3 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1-[1+2] = -2$$

$$\xi_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \xi_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\xi_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{-1} = 0$$

$(-1, 0, 2)$ … řešení

Zkouška:
$$L_1 = -1 + 2 = 1 = P_1$$
$$L_2 = 0 + 2 = 2 = P_2$$
$$L_3 = -1 + 0 + 2 = 1 = P_3$$