$A^{i}{}_{j}$ $\quad i \leftarrow$ řádkový $\quad j \leftarrow$ sloupcový

A_{ij} $\quad i \uparrow$ řádkový $\quad j \nwarrow$ sloupcový

$$C = A . B$$

- $$C^{i}{}_{j} = \sum_{s=1}^{n} A^{i}{}_{s} \cdot \cancel{B}^{s}{}_{j}$$

$$\underline{C_{ij}} = \sum_{s=1}^{n} A_{\underline{i}\,\underline{s}} B_{\underline{s}\,j}$$

$$(C^{i}{}_{j})^{T} = C^{j}{}_{i}$$

$$(C_{ij})^{T} = C_{ji}$$

$$(C_{ij})^{T} = \sum_{s=1}^{n} B_{j\underline{s}} A_{\underline{s}i}$$

$$C^{j}{}_{i} = \sum_{s=1}^{n} B^{j}{}_{s} \cancel{A}^{s}{}_{i}$$

$$C = A . B$$

$$C^{T} = B^{T} . A^{T}$$

$$\bar{C} = B . A$$

- $$\bar{C}^{i}{}_{j} = \sum_{i=1}^{n} B^{i}{}_{s} \cdot \cancel{A}^{s}{}_{j}$$

$$\left(= \sum_{i=1}^{n} A^{s}{}_{j} \cdot \cancel{B}^{i}{}_{s} \right)$$

$$\bar{C}_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n}\right) B_{i\underline{s}} A_{\underline{s}j}$$

$$\sum_{i}$$

$$\sum$$

Souřadnice vektorů

Dohoda: Souřadnice vektorů budeme psát s horními indexy.

V … vekt. pr. nad P

$e_1, \dots, e_n$ bázi ve V

$$\forall u \in V : \; u = \underline{u}^{\textcircled{1}} \cdot e_1 + \underline{u}^{\textcircled{2}} e_2 + \dots + \underline{u}^{\textcircled{n}} \cdot e_n$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \cdot e_i$$

- $\underline{u} = \underbrace{(u^1, \dots, u^n)}_{\in P^n}$ $\qquad P^n$ nad P

$$V \text{ nad } P \cong P^n \text{ nad } P$$

$\dim V = n$

$$V \to P^n, \quad u \mapsto (u^1, \dots, u^n)$$

$$u = u^1 e_1 + \dots + u^n e_n$$

$$= \underbrace{(e_1 \dots e_n)}_{\substack{\parallel \\ (e) \\ 1|n}} \underbrace{\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}}_{n|1 \; = 1|1} = (e_1 . u^1 + \dots + e_n . u^n)$$

$= (u)$

$= (e) . (u)$

Příklad: $z: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (a,b,c) \mapsto (a-b,c)$

$\forall (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3, \forall r \in \mathbb{R}$:

$$L_1 = z\big((a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)\big) =$$
$$= z\big((a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)\big) =$$
$$= (a_1+a_2-b_1-b_2, c_1+c_2)$$

$$P_1 = z((a_1,b_1,c_1)) + z((a_2,b_2,c_2))$$
$$= (a_1-b_1, c_1) + (a_2-b_2, c_2)$$
$$= (a_1+a_2-b_1-b_2, c_1+c_2)$$

$$L_2 = z\big(r.(a_1,b_1,c_1)\big) = z((ra_1, rb_1, rc_1))$$
$$= (ra_1 - rb_1, rc_1) = r.(a_1-b_1, c_1)$$

$$P_2 = r.z((a_1,b_1,c_1)) = r.(a_1-b_1,c_1)$$

báze $\mathbb{R}^3$: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

báze $\mathbb{R}^2$: $(1,0), (0,1)$

$$z((1,0,0)) = (1,0) = \underline{\boxed{1}}\overset{\bar{e}_1\,\|}{(1,0)} + \underline{\boxed{0}}.\overset{\bar{e}_2\,\|}{(0,1)}$$

$$z((0,1,0)) = (-1,0) = \underline{\boxed{-1}}(1,0) + \underline{\boxed{0}}.(0,1)$$

$$z((0,0,1)) = (0,1) = \underline{\boxed{0}}.(1,0) + \underline{\boxed{1}}.(0,1)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$(z(e_1), z(e_2), z(e_3))$

$$V = (\bar{e}_1, \bar{e}_2).\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1|3 \qquad 1|2. \qquad 2|3$

$z(e_1) = \bar{e}_1 . 1 + \bar{e}_2 . 0$

$\vdots$

Definice: Buď dán. v. pr. U s bazí $e_1, \dots, e_n$ a vekt. pr. V s bazí $f_1, \dots, f_m$. Buď $\alpha : U \to V$ lin. zobr.; Matice A typu m/n, jejíž i-tý sloupec je tvořen souř. vekt. $\alpha(e_i) \in V$ v bázi $f_1, \dots, f_m$ se nazývá matice lin. zobr. α vzhledem k bazím $e_1, \dots, e_n$ a $f_1, \dots, f_m$.

Pozn.: $$\alpha(e_i) = \sum_j A^j_i f_j$$

$$f_j \cdot A^j_i$$

Tvrzeni: Buď $u \in \mathcal{U}$ vektor, $x=(x^1,\dots,x^n)$ sloupec jeho souř. v bázi $e_1,\dots,e_n$ prostoru $\mathcal{U}$. Buď $v = \alpha(u) \in V$ obraz vekt. u, $y = (y^1,\dots,y^m) \in P^m$ sloupec jeho souř. v bázi $f_1,\dots,f_m$ prostoru V. $\alpha : \mathcal{U} \to V$ je lin. zobr. Pak platí:

$$y = A.x.$$

Důkaz: $\alpha : \mathcal{U} \to V$ lin. zobr.

báze $\mathcal{U}$: $e_1,\dots,e_n$

báze V: $f_1,\dots,f_m$

$u \in \mathcal{U}$: $u = u^1 e_1 + u^2.e_2 + \dots + u^n.e_n$

$$= (e_1,\dots,e_n).\underbrace{\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^n\end{pmatrix}}_{x}$$

$$\alpha(u) = v = v^1.f_1 + \dots + v^m f_m = (f_1 \dots f_m)\underbrace{\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^m\end{pmatrix}}_{y}$$

$$y = A.x$$

- $u = \sum_i u^i e_i$

$$\underline{v} = \alpha(u) = \alpha\left(\sum_i u^i e_i\right) = \sum_i u^i.\alpha(e_i)$$

$$= \sum_i u^i.\sum_j A^j_i f_j = \boxed{\sum_i}\sum_j \boxed{u^i A^j_i} f_j$$

$$\sum_i u^i A^j_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^m\end{pmatrix}}_{y} = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^n\end{pmatrix}}_{x} \qquad y = A.x$$

Tvrzeni: Buď U v.p. s bazi $e_1, \dots, e_m$.
V vekt. pr. s bazi $f_1, \dots, f_n$,
buď W vekt. pr. s bazi $g_1, \dots, g_p$.
Buďte $\alpha: U \to V$, $\beta: V \to W$
Lin. zobr. Buď A matice
zobr. α vzhledem k bazim
$e_1, \dots, e_m$ a $f_1, \dots, f_n$, buď B matice
zobr. β vzhl. k bazim $f_1, \dots, f_n$ a
$g_1, \dots, g_p$.
Pak je součin $\underline{B \cdot A}$ mat. zobr.
$\underline{\beta \circ \alpha}$ vzhl. k bazim $e_1, \dots, e_m$ a
$g_1, \dots, g_p$.

Tvrzení: (při stejném ozn.) Nechť je α izomorfismus (pak je $m=n$). Pak je matice A invertibilní a A^{-1} je matice inv. lin. zobr. $\alpha^{-1}: V \to U$.

Důkaz:

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = id_U$$

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = id_U$$

$$A \cdot B = E$$

$$B \cdot A = E$$

$$\Rightarrow \underline{B = A^{-1}}$$

$\square$