Matice přechodu

Buď dán v. pr. U nad P. $\dim U = n$

stará báze v U: $e_1, \dots, e_n$

nová báze v U: $e'_1, \dots, e'_n$

Souř. vekt. $u \in U$ ve star. bázi: $x = (x^1, \dots, x^n)$

Souř. vekt. $u \in U$ v nové bázi: $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$

Pozn.: $u = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + \dots + x^n e_n$

$$u = x'^1 \cdot e'_1 + x'^2 e'_2 + \dots + x'^n e'_n$$

Otázka: $x' = x'(x, \dots)$?

Definice: Matice Q jejíž sloupce jsou tvořeny starými souřadnicemi nových báz. vektorů, se nazývá matice přechodu (od staré báze k nové bázi).

Příklad: báze U: e_1, e_2, e_3 ... stará báze

$P = \mathbb{R}$

f_1, f_2, f_3 ... nová báze

$$f_1 = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 e_3$$
$$f_2 = -2 e_2 + 3 e_3$$
$$f_3 = 2 e_3$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pozn.:

$$\underbrace{id_U(e'_i)}_{= e'_i} = \sum_j Q^j_i e_j \overset{?}{=} \sum_j e_j \cancel{Q}^j_i$$

$$\boxed{e'_i = \sum_j Q^j_i e_j}$$

$$\boxed{(e') = (e).Q}$$

$$(e') = (e).Q$$

$$u = (e).(x)$$

$$u = (e').(x')$$

$$(e).(x) = (e').(x')$$

$$(e).(x) = (e).Q.(x')$$

$$\Rightarrow (x) = Q.(x')$$

$$\boxed{(x') = Q^{-1}.(x)}$$

$$(u) = (e).(x) = (e_1\, e_2 \dots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

$$(e') = (e).Q$$

$$(x') = Q^{-1}.(x)$$

$$(e).(x) = (e').(x')$$

$$= \underbrace{(e).Q}_{(e')}.\underbrace{Q^{-1}.(x)}_{(x')} = (e).(x)$$

Tvrzení: Matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e_1', \dots, e_n')$ je totožná s mat. identického zobr $id: U \to U$ vzhledem k bázím $(e_1', \dots, e_n')$ a $(e_1, \dots, e_n)$ (v tomto pořadí).

Důsledek 1: Q je vždy invertibilní

2. $$(x') = Q^{-1} \cdot (x)$$

Změna matice lin. zobr. při změnách bází

$$
\begin{tikzcd}
U \; (e_1, \dots, e_n) \arrow[r, "\alpha", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "Q^{-1}"] & V \; (f_1, \dots, f_m) \arrow[d, "\mathrm{id}", "R^{-1}"'] \\
U \; (e'_1, \dots, e'_n) \arrow[r, "\alpha", "\bar{A}"'] & V \; (f'_1, \dots, f'_m)
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{\bar{A} = R^{-1} . A . Q}$$

Vlastní vektory

Definice: Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ se nazývá <u>vlastní vektor</u> lin. tr. $f: V \to V$, když

$$f(v) = \lambda . v$$

pro nějaký skalár $\lambda \in P$.
Skalár λ se nazývá <u>vlastní hodnota</u> příslušná vl. v. v.

Príklady: 1. $id_V : V \to V,\ v \mapsto v$

vl. vektory $id_V = \{ V \setminus \{0\},\ \lambda = 1 \}$

$\forall v \in V$:

$$id_V(v) = \lambda . v$$

$$1 . v = \overset{"1}{\lambda} . v$$

2. $z : V \to V,\ v \mapsto 0$

vl. v. $z = \{ V \setminus \{0\},\ \lambda = 0 \}$

$\forall v \in V$:

$$z(v) = \lambda . v$$

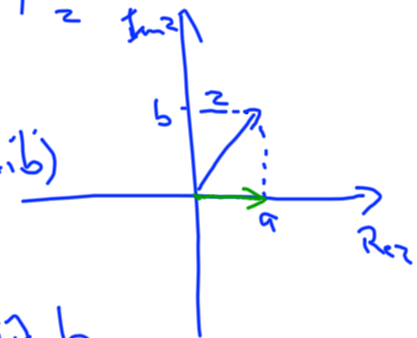
$$0 = \lambda . v$$

$$0 . v = \lambda . v$$

3. $V = \mathbb{C}$

$P = \mathbb{R}$

$\mathrm{Rez} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \underbrace{a+ib}_{z} \mapsto a$



$\mathrm{Rez}(z) = \lambda . z$

$\underbrace{\mathrm{Rez}(a+ib)}_{a} = \lambda . (a+ib)$

$a = \lambda . (a+ib)$

$a + i.0 = \lambda a + i\lambda . b$

$\Rightarrow a = \lambda . a \ \wedge \ 0 = \lambda . b$

1) $\lambda \neq 0 \Rightarrow 1.a = \lambda . a$

$\Rightarrow \underline{\lambda = 1}$ $\quad \Rightarrow 0 = 1.b$

$\underline{b = 0}$

2) $\underline{\lambda = 0}$

$a = 0.a \qquad 0 = 0.b$

$\underline{a = 0} \qquad 0 = 0$

$z = a + i\overset{=0}{b}$ $\qquad$ | $\qquad z = \overset{=0}{a} + i.b$

$\lambda = 1$ $\qquad$ | $\qquad \lambda = 0$

$L_{\lambda=1} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \wedge \mathrm{Im}z = 0 \}$ $\qquad L_{\lambda=0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \wedge \mathrm{Re}z = 0 \}$

$L_{\lambda=1} = \{ a+ib \mid a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b = 0 \}$

$L_{\lambda=0} = \{ a+ib \mid a = 0, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \}$

Tvrzení: Buď $f: V \to V$ lin. zobr. v. pr. V nad P.

Buď $\lambda \in P$ skalár. Ozn.

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda . v \}$$

Pak 1. V_λ je vekt. podpr. ve V,

2. V_λ je nenulový podpr., právě tehdy, když λ je vl. hodnota

Důkaz: 1) a) $0 \overset{?}{\in} V_\lambda$, $f(v) = \lambda . v$

$$\underline{f(0)} = \lambda . 0 = \underline{0}$$

$\Rightarrow 0 \in V_\lambda$

b) $\forall v_1, v_2 \in V_\lambda$

$$\underline{f(v_1 + v_2)} = \underline{f(v_1)} + f(v_2)$$

$$= \lambda . v_1 + \lambda . v_2 = \underline{\lambda . (v_1 + v_2)}$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$

c) $\forall v \in V_\lambda \; \forall r \in P$

$$\underline{f(r.v)} = r . f(v) = r . (\lambda v)$$

$$= \underline{\lambda . (r v)}$$

$r . v \in V_\lambda$

V_λ vekt. podpr. ve V.

$\square$