Tvrzení: Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. h. lin. transformace $f: V \to V$ vekt. prostoru V nad P. [jsou navzájem různé] Buďte $v_1, \dots, v_n$ nějaké vl. v., příslušné pořadě vl. h. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lin. nezávislé.

$f: V \to V$ ... lin transformace

V nad P

$$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = \lambda_n \cdot v_n$$

Důkaz:

(1) $f(x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n) = f(0)$

$$x_1 \cdot f(v_1) + x_2 \cdot f(v_2) + \dots + x_n \cdot f(v_n) = 0$$

(2) $f(x_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot \lambda_2 v_2 + \dots + x_n \lambda_n v_n) = f(0)$

$$x_1 \cdot \lambda_1 \cdot f(v_1) + x_2 \lambda_2 f(v_2) + \dots + x_n \lambda_n f(v_n) = 0$$

$f \dots$ $x_1 \lambda_1^2 v_1 + x_2 \lambda_2^2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot \lambda_n^2 \cdot v_n = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 v_1 & x_2 v_2 & \dots & x_n v_n & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n & 0 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

různé vl. hodnoty

$\Rightarrow$ Soustava má pouze triviální řešení:

$x_1 v_1 = 0$ $\quad$ $v_1, \dots, v_n$ jsou vl. v.

$\vdots$ $\quad$ $\Rightarrow$ jsou nenulové

$x_n v_n = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$

$\vdots$

$x_n = 0$

$\Rightarrow$ vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lin. nezávislé $\square$

$$f(v) = \lambda \cdot v$$

$f: V \to V$ Lin. tr.

$v \in V \setminus \{0\}$

báze ve V: $e_1, \dots, e_n$

$f \dots F$

$v \dots \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v)$ $\quad v = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_n \cdot e_n$

$F \cdot (v) = \lambda \cdot (v)$ $\quad \underset{n/n}{\begin{pmatrix} & & \\ & F & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{n/1}{\begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}} = \lambda \underset{n/1}{\begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}}$

$F \cdot (v) - \lambda \overset{E}{\cdot} (v) = 0$

$\boxed{\underbrace{(F - \lambda \cdot E)}_{n/n} \cdot (v) = 0}$ $\quad \lambda \cdot \underset{n/n}{\begin{pmatrix} & & \\ & E & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{n/1}{\begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}}$

$v = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_n \cdot e_n$

$$\boxed{\det(F - \lambda E) = 0}$$

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 + \cancel{1} - \cancel{1} - [(2-\lambda) + \cancel{(2-\lambda)} - \cancel{(2-\lambda)}]$$

$$= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\cdot((2-\lambda)^2 - 1)$$

$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

$$= (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 2)\cdot(\lambda - 3) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 E} \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \end{array} \sim \left(\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = -t \\ v_3 = t \end{matrix}$$

$v_{\lambda_1} = t\cdot(0,-1,1) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3t \\ 3t \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

Tvrzení: Lin. tr. $f: V \to V$ vekt. pr. V konečné dimenze n nad polem P má nejvýše n různých vlastních hodnot.

Důkaz:

$$\det(F - \lambda E) = 0$$

polynom v λ n-tého stupně

$\Rightarrow$ nejvýše n různých vl. hodnot.

$\square$

$\alpha : V \to V$ Lin. tr.

A ... v bázi $e_1, \dots, e_n$

A' ... v bázi $e_1', \dots, e_n'$

$$A' = Q^{-1} A Q \quad \text{... podobnostní transformace}$$

Tvrzení: Podobné matice mají stejné charakteristické kořeny

Důkaz:

$$\underline{\det(A' - \lambda E)} = \det(Q^{-1} A Q - \lambda E)$$

$$= \det(Q^{-1} A Q - \lambda \cdot \underbrace{Q^{-1} \cdot Q}_{})$$

$$= \det(Q^{-1} (AQ - \lambda E Q))$$

$$= \det(\underbrace{Q^{-1}} \underbrace{(A - \lambda E)} \underbrace{Q})$$

$$= \underbrace{\det Q^{-1}}_{\in P} \cdot \underbrace{\det(A - \lambda E)}_{\in P} \cdot \underbrace{\det Q^{-1}}$$

$$= \underbrace{\det Q . \det Q^{-1}}_{\det(\underbrace{Q Q^{-1}}_{= E}) = 1} \cdot \det^{\in P} (A - \lambda E)^{\in P}$$

$$= \underline{\det(A - \lambda E)}$$

$\square$.

$f: V \to V$ Lin. tr. $\dim V = n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou navzájem různé vl. h.

$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n \cdot v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$

$v_1, \dots, v_n$ generují V a jsou lin. nezávislé

$\Rightarrow$ tvoří bázi

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$