Definice: Buď $V$ vekt. pr. nad $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$.

Hermiteovský

Eukleidovský skalární součin

na $V$ je zobrazení: $g: V \times V \to \mathbb{R}$ $\mathbb{C}$,

splňující $\forall u, v, w \in V$, $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

1. $g(u+v, w) = g(u,w) + g(v,w)$

   $g(a \cdot u, v) = a \cdot g(u,v)$,

2. $g(u,v) = g(v,u)^*$,

3. Jestliže $u \neq 0$ pak $g(u,u) > 0$.

$$\underbrace{g(\underbrace{\underbrace{u}_{\in V}, \underbrace{v}_{\in V}}_{\in V \times V})}_{\in \mathbb{C}}$$

$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

$z^* = a - ib$

$a \in \mathbb{C}$

$$\underline{g(u, av)} \overset{2.}{=} (g(av, u))^* \overset{1.}{=} (a \cdot g(v,u))^*$$

$$\overset{2.}{=} (a \cdot (g(v,u))^*)^* = a^* \cdot (g(v,u))^{**}$$

$$= \underline{a^* \cdot g(v,u)}$$

$u \neq 0$

$g(u,u) > 0$

2. $g(u,v) = g(v,u)^*$, $u = v$

$$\underbrace{g(u,u)}_{a+ib} = g(u,u)^*$$

$$a + ib = a - ib$$

$$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow g(u,u) \in \mathbb{R}$$

Příklady:

$V = \mathbb{R}^3, \; P = \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

1. $((x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)) \mapsto x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

2. $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto a \cdot (x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)$

$a \in \mathbb{R}^+$

3. $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto a_1 \cdot x_1 x_2 + a_2 \cdot y_1 y_2 + a_3 \cdot z_1 z_2$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$

Def.: Vekt. prostor s eukleidovským (resp. hermiteovským) skal. souč. se nazývá <u>eukleidovský</u> (resp. <u>hermiteovský</u> či unitární) <u>prostor</u>.

Definice: Buď $v \in V$. Označíme

$$\|v\| \doteq \sqrt{g(u,u)}$$

Číslo $\|v\|$ se nazývá <u>délka</u> vektoru $v$.

Pozn.: $g : V \times V \to \mathbb{R}$

1. $g(u,v)$
2. $g(u,v)$
3. $u \cdot v$

$\| \; \| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto +\sqrt{g(v,v)}$

$x \mapsto y$

$\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$ $\quad f(x) = x$

**Tvrzení (Cauchy-Buňakovského-Schwarzova nerovnost):**

$\forall\, u, v \in V$:

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $u, v$ lin. záv.

**Tvrzení (trojúhelníková nerovnost):**

Nechť $u, v \in V$. Pak

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

a rovnost platí právě tehdy, jsou-li $u, v$ lin. závislé.

C-B-S nerovnost pro euklid. případ:

$$-1 \leq \underbrace{\frac{g(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}}_{\cos(\varphi(u,v))} \leq 1$$

– odchylka vektorů $u, v$

Definice: Řikáme, že $u, v \in V$ jsou navzájem <u>kolmé</u> (nebo také <u>ortogonální</u>), je-li $g(u,v)=0$.

Zapisujeme $u \perp v$.

# Gramm-Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení: V každém konečnérozm. vekt. pr. se skal. součinem existuje ortonormální báze.

Důkaz: báze ve V: $u_1, \dots, u_n$

skal. součin: $g$

ortonormální (hledaná) báze: $e_1, \dots, e_n$

$e_1 = u_1$

- $e_2 = u_2 + c \cdot e_1$

$g(e_2, e_1) = 0$

$g(u_2 + c \cdot e_1, e_1) = 0$

$g(u_2, e_1) + c \cdot g(e_1, e_1) = 0$

$$c = -\frac{g(u_2, e_1)}{g(e_1, e_1)}$$

$$\boxed{e_2 = u_2 - \frac{g(u_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} \cdot e_1}$$

$e_3 = u_3 + c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2$

$g(e_3, e_2) = 0 \qquad g(e_3, e_1) = 0$

$g(u_3 + c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2, e_2) = 0$

$g(u_3, e_2) + c_1 \cdot \underbrace{g(e_1, e_2)}_{0} + c_2 \cdot g(e_2, e_2) = 0$

$g(u_3, e_2) + c_2 \cdot g(e_2, e_2) = 0$

$$c_2 = -\frac{g(u_3, e_2)}{g(e_2, e_2)} \qquad c_1 = -\frac{g(u_3, e_1)}{g(e_1, e_1)}$$

$$\boxed{e_3 = u_3 - \frac{g(u_3, e_1)}{g(e_1, e_1)} \cdot e_1 - \frac{g(u_3, e_2)}{g(e_2, e_2)} \cdot e_2}$$

$$e_4 = u_4 - \frac{g(u_4, e_1)}{g(e_1, e_1)} e_1 - \frac{g(u_4, e_2)}{g(e_2, e_2)} e_2 - \frac{g(u_4, e_3)}{g(e_3, e_3)} e_3$$

$\vdots$