Definice: Je-li $U \subseteq V$ podpr. v.p. V se skal. součinem, položíme

$U^{\perp} = \{ v \in V \mid v \perp u$ pro všechna $u \in U \}$

Podmn. $U^{\perp} \subseteq V$ se nazývá <u>ortogonální doplněk</u> podpr. U.

Příklad: $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se stand.

$\overset{\shortparallel}{V}$ skal. součinem

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) \mapsto x_1 \cdot x_2 + \dots + z_1 \cdot z_2$$

- $\mathcal{U} = [\![(1,0,0), (0,1,0)]\!]$

$\mathcal{U}: \ z = 0$

$\mathcal{U} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$

- $\mathcal{U}^{\perp} = [\![(0,0,1)]\!]$

$U^\perp$: ?

$$U^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$$

Tvrzení: Ortogonální doplněk $\mathcal{U}^\perp$ je podprostor ve V.

Důkaz: 1. $\mathcal{U}^\perp \subseteq V$

$\mathcal{U}^\perp = \{ v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in \mathcal{U} \}$

2. $v = 0$

$g(0, u) = 0 \ \forall u \in V$

$\Rightarrow 0 \in \mathcal{U}^\perp$

$$\underline{g(0,u)} = g(0\cdot u, u) = 0\cdot \underbrace{g(u,u)}_{\in\mathbb{R}} = \underline{0}$$

3. $a, b \in U^\perp$

$g(a+b, u) =$ $\qquad$ Lib. $u \in U$

$= \underbrace{g(a,u)}_{=0} + \underbrace{g(b,u)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow a+b \in U^\perp$

4. $a \in U^{\perp}, r \in P$

$g(a \cdot r, u) =$ Lib. $u \in U$

$= r \cdot \underbrace{g(a, u)}_{=0} = r \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow a \cdot r \in U^{\perp}$

$\Rightarrow U^{\perp}$ je vekt. podpr. ve V. $\square$

Tvrzení: Je-li prostor V konečně-rozm., $\dim V = n$, pak $V = U \dotplus U^{\perp}$ a platí $\dim U^{\perp} = n - \dim U$.

Tvrzení: Buď V kon. rozm. v. pr. se skal. součinem. Buďte $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ jeho podpr.

1. Jestliže $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow \mathcal{U}_1^\perp \supseteq \mathcal{U}_2^\perp$
2. $\mathcal{U}^{\perp\perp} = \mathcal{U}$
3. $(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)^\perp = \mathcal{U}_1^\perp \cap \mathcal{U}_2^\perp$
4. $(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^\perp = \mathcal{U}_1^\perp + \mathcal{U}_2^\perp$

$\mathcal{U}$ je podpr. ve V se skal. součinem

$$V = \mathcal{U} \dot{+} \mathcal{U}^{\perp}.$$

$\forall v \in V$ máme jednoznačný rozklad

$$v = v_{\mathcal{U}} + v_{\mathcal{U}^{\perp}}, \quad v_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}, \quad v_{\mathcal{U}^{\perp}} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

$v_{\mathcal{U}}$ se nazývá ortogonální projekce vektoru v do podprostoru $\mathcal{U}$.

zobr.: $pr_U : V \to U, \; v \mapsto v_U$

$pr_{U^\perp} : V \to U^\perp, \; v \mapsto v_{U^\perp}$

Tvrzení: Buď $e_1, \dots, e_n$ ortonorm. báze v podpr. U konečněrozm. v.p. V se skal. součinem. Pak $\forall v \in V$ máme

$$Pr_U v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n$$

Důkaz: báze v U: $e_1, \dots, e_m$ ← ortonorm. báze

$\dim U = m$

$\dim V = n$

$m \leq n$

báze ve V: $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$

$$v = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + v_m e_m + \dots + v_n e_n$$

$$Pr_U v = a_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + a_m \cdot e_m$$

$$v = \overset{g(v,e_1)}{\overset{\parallel}{v_1}} \cdot e_1 + \overset{g(v,e_2)}{\overset{\parallel}{v_2}} \cdot e_2 + \dots + \underset{g(v,e_m)}{\underset{\parallel}{v_m}} \cdot e_m + \dots + v_n \cdot e_n$$

$$g(v,e_1) = g(v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + v_m \cdot e_m + v_n \cdot e_n, e_1)$$

$$= v_1 \cdot \underbrace{g(e_1,e_1)}_{1} + v_2 \cdot \underbrace{g(e_2,e_1)}_{0} + \dots v_m \cdot \underbrace{g(e_m,e_1)}_{0} + v_n \cdot \underbrace{g(e_n,e_1)}_{0}$$

$$g(v,e_1) = v_1$$

$$v = g(v,e_1) \cdot e_1 + \dots + g(v,e_n) e_n$$

Shodnost je lin. tr. zach. skalární součin.

$$g(u,v) = g(f(u), f(v))$$

Definice: Buď V vekt. pr. se skal. součinem, buď $f: V \to V$ lin. tr. Řekneme, že f je shodnost, když platí

$$g(u,v) = g(f(u), f(v)).$$

Shodnost zachovává délky vektorů:

$$\|f(u)\|^2 \stackrel{?}{=} \|u\|^2$$

$$\|f(u)\|^2 = g(f(u), f(u)) = g(u,u) = \|u\|^2$$

kl. čísla

$$\Rightarrow \|f(u)\| = \|u\|$$

Tvrzení: Lin. tr $f: V \to V$ je shodnost právě tehdy, když zachovává délky vektorů.

Tvrzení: Každá shodnost v kon. rozm. v. pr. je izomorfismus.

Tvrzení: Buď $e_1, \dots, e_n$ ortonorm. báze ve V, buď $f: V \to V$ lin. tr.

Pak f je shodnost právě tehdy, když $f(e_1), \dots, f(e_n)$ je též ortonorm. báze.