Definice: Buď V vekt. pr. nad $\mathbb{R}$.

Bilineární forma na V je zobrazení $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$, splňující $\forall\, u, v, w \in V$ a $\forall\, a \in \mathbb{R}$

- $\beta(u+v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w)$
- $\beta(a.u, v) = a.\beta(u, v)$

$$\beta(u, v+w) = \beta(u, v) + \beta(u, w)$$

$$\beta(u, av) = a.\beta(u, v)$$

Příklad: Eukleidovský skalární součin

Definice: Buď V kon. rozm. v.p. s bází $e_1,\dots,e_n$. Matice B s prvky $B_{ij} = \beta(e_i,e_j)$ se nazývá matice bilineární formy β vzhledem k bázi $e_1,\dots,e_n$.

$$\underbrace{\beta(\underbrace{\underbrace{e_i}_{\in V},\underbrace{e_j}_{\in V}}_{\in V\times V})}_{\in \mathbb{R}}$$

Příklad: $V = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$

$$\beta((x^1,x^2),(y^1,y^2)) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$$

kanonická báze: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$\beta(e_1,e_1) = 1 = B_{11}$

$\beta(e_1,e_2) = 2 = B_{12}$

$\vdots$

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y^1 & y^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

//

Tvrzení: Buď V kon. rozm. v. p. s bází $e_1, \dots, e_n$, buď β bilin. forma na V, která má vzhledem k dané bázi matici B_{ij}. Buďte u, v lib. vektory z V.

$$u = u^1 e_1 + \dots + u^n \cdot e_n,$$
$$v = v^1 e_1 + \dots + v^n \cdot e_n.$$

Pak platí

$$\beta(u, v) = \sum_{i,j} B_{ij} u^i v^j =$$
$$= u^T . B . v . \qquad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

$1|n \quad n|n \quad n|1$

Důkaz: $\underline{\beta(u,v)} = \beta(u^i e_i, v^j e_j) =$

$$= u^i v^j \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{B_{ij}} = u^i B_{ij} v^j = \underline{u^T \cdot B \cdot v}$$

Tvrzení: Buď Q matice přechodu od báze $e_1, \dots, e_n$ k nové bázi $e'_1, \dots, e'_n$. Buď B matice bilin. formy β vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$ a buď B' matice téže formy vzhledem k bázi $e'_1, \dots, e'_n$.

Definice: Bilineární forma, splňující

$$\beta(u,v) = \beta(v,u)$$ se nazývá

<u>symetrická</u>.

Tvrzení: Bilineární forma β je symetrická, právě tehdy, když je její matice B (v jakékoli bázi) symetrická.

Důkaz: $e_1, \dots, e_n$ báze v V

"$\Rightarrow$" předpoklad: β je symetrická

$$\beta(u,v) = \beta(v,u) \quad \forall\, u,v \in V$$

$$\Rightarrow \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\parallel} = \underbrace{\beta(e_j, e_i)}_{\parallel}$$

$$B_{ij} = B_{ji} \Rightarrow B \text{ je symetrická}$$

"$\Leftarrow$" cvičení

Definice: Buď $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ sym. bilin. forma. Zobrazení $\bar{\beta} : V \to \mathbb{R}$, zadané předpisem

$$\boxed{\bar{\beta}(v) = \beta(v, v)}$$

se nazývá <u>kvadratická forma</u> příslušná sym. bilin. formě β.