Kanonické tvary

(pro sym. bilin. formy)

Tvrzení: Každá reálná sym. matice B je kongruentní s diag. maticí, jejíž diag. prvky jsou $0, 1, -1$.

Důsledek: Buď dána sym. bilin. forma β na V dimenzen. Pak ex. báze ve V taková, že matice formy β je v kanonickém tvaru.

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \overset{+}{\cdot(-2)} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}}_{B_{kan.}} \left| \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}}_{Q^T} \right.\right)$$

Zkouška: ....

Tvrzení (Sylvestrův zákon setrvačnosti):
Buď β bilin. sym. forma, buď B diag. matice, která je maticí formy β v nějaké bázi. Pak počet nulových, kladných a záporných prvků na diagonále nezávisí na volbě báze.

Definice: Sym. bilin. forma na reálném vekt. prostoru V se nazývá kladně definitní, je-li každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ kladný, tj. platí-li $\beta(v,v) > 0$ pro každé $v \neq 0$.

Tvrzení: Sym. bilin. forma β je kladně def. právě tehdy, když existuje báze, v níž má jednotkovou matici.

Př.:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B_1 = 1 > 0$

$\det B = \det B_2 = 2 - 4 = -2 < 0$

Tvrzení: Sym. čtvercová matice B typu $n \times n$ je kladně def. právě tehdy, když platí $D_1 > 0, \dots D_n > 0$, kde D_i ozn. subdet. tvořený prvními i řádky a prvními i sloupci matice B.

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. a 2. rozklad lin. transformace.

A .... matice lin. tr. $\alpha : V \to V$
(v bázi $e_1, \dots, e_n$)

$$A_{JNT} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \xi_1 & \\ 1 & \xi_1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \xi_2 & & \\ 1 & \xi_2 & \\ & 1 & \xi_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Jordanovy buňky

(v bázi $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$)

Jordanova báze

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 1 & \xi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad (2) \quad (0)$$

$$A'_{JNT} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

1. rozklad LT

$$\alpha : V \to V \quad \dots \quad A$$

báze $(e_1, \dots, e_n)$

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_k \qquad k \le n$$

matrice $\alpha|_{V_1}$

$$A_{1\,rozkl.} = \begin{pmatrix} \boxed{\;1\;} & & \emptyset \\ & \boxed{\;2\;} & \\ \emptyset & & \ddots\ \boxed{\;k\;} \end{pmatrix}$$

matrice $\alpha|_{V_k}$

2. rozklad LT:

$$V = \underset{\substack{\parallel \\ T_{1,1} \dot{+} T_{1,2}}}{V_1} \dot{+} \dots \dot{+} \underset{\substack{\parallel \\ T_{k,1} \dot{+} T_{k,2} \dot{+} T_{k,3}}}{V_k}$$